Correction du C/C MQ 02/04/2015

Ex. 1

1) $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 \, dx = 1 \Rightarrow [\psi]^2 [L] = 1 \Rightarrow [\psi] = [L]^{-1/2} = m^{-1/2}$

2). Non, $\psi(x)$ n'est pas propre pour H car

$$H\psi = A\left(3E_1\varphi_1(x) + 2iE_3\varphi_3(x) - E_5\varphi_5(x)\right)$$

$$\neq \lambda A\left(3\varphi_1(x) + 2i\varphi_3(x) - \varphi_5(x)\right)$$

sinon $\lambda = E_1 = E_3 = E_5$ ce qui n'est pas le cas car le spectre est non-dégénéré.

3). $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx = |A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\left(3\varphi_1(x) + 2i\varphi_3(x) - \varphi_5(x)\right)}\left(3\varphi_1(x) + 2i\varphi_3(x) - \varphi_5(x)\right) dx$

$= \left|\begin{matrix}\text{grâce à} \\ \text{l'orthonormalité}\end{matrix}\right| = |A|^2 (3^2 + 2^2 + 1^2) = 14|A|^2 = 1$

Donc $A = \frac{1}{\sqrt{14}} e^{i\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

La normalisabilité ne fixe pas la phase de A.

4). L'équation de Schroedinger stationnaire:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' = E\psi \Rightarrow \psi(x) = C\cos\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}\,x + C'\sin\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}\,x$$

- les fonctions propres qui correspondent aux états excités no. 1, 3, 5 sont <u>impaires</u> $\Rightarrow C = 0$
- $\sin\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}\,\frac{L}{2} = 0 \Rightarrow E_n = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{4}{L^2}\pi^2(k+1)^2$, $k \in \mathbb{Z}_+$

$k=0 \Rightarrow n=1$, $k=1 \Rightarrow n=3$, $k=2 \Rightarrow n=5$, ... $\Rightarrow n = 2k+1$

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{4}{L^2}\pi^2\left(\frac{n-1}{2}+1\right)^2 = \underbrace{\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\pi^2}{L^2}}_{E_0}(n+1)^2 = E_0(n+1)^2$$

(pour n impaires)

- Donc

$$\psi(x) = A\left(3\varphi_1(x)e^{-\frac{iE_1}{\hbar}t} + 2i\varphi_3(x)e^{-\frac{iE_3}{\hbar}t} - \varphi_5(x)e^{-\frac{iE_5}{\hbar}t}\right)$$

avec

$$E_1 = 4E_0, \quad E_3 = 16E_0, \quad E_5 = 36E_0$$

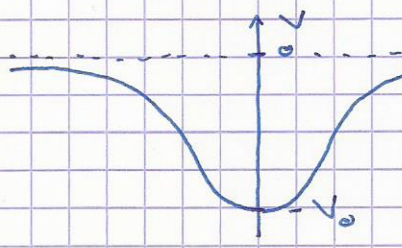
La densité $\rho(x) = |\psi(x,t)|^2$ dépend de t, mais en $x_0 = 0$ elle reste toujours nulle car les fonctions d'onde $\varphi_1(x)$, $\varphi_3(x)$, $\varphi_5(x)$ sont impaires.

5). $\langle E \rangle = E_1 \cdot \frac{3^2}{|A|^2} + E_3 \frac{2^2}{|A|^2} + E_5 \frac{1^2}{|A|^2} =$

$= \frac{E_0}{|A|^2} \left(4 \cdot 9 + 16 \cdot 4 + 36 \cdot 1 \right) = E_0 \frac{136}{14} = \frac{68}{7} E_0$

6). $\psi_{t > t_0}(x) \sim e^{-\frac{i}{\hbar} E_5 (t - t_0)} \varphi_5(x)$

<u>Ex. 2</u> Potentiel $V(r) = -V_0 \, e^{-r^2/2R^2}$



puits bidimensionnel

1). Mouvement classique:

- $-V_0 \leq E < 0 \Rightarrow$ mouvement fini $\Rightarrow$ spectre quantique discret
- $E \geq 0 \Rightarrow$ mouvement infini $\Rightarrow$ spectre quantique continu
- symétrie de rotations autour de l'origine $\Rightarrow$ conservation de $L_z \Rightarrow$ dégénérescence des niveaux en

2). Commutateurs:

$[Q, x] = [x p_y - y p_x, x] = -y [p_x, x] = i\hbar y$

$[Q, y] = [x p_y - y p_x, y] = x [p_y, y] = -i\hbar x$

$[Q, p_x] = [x p_y - y p_x, p_x] = [x, p_x] p_y = i\hbar p_y$

$[Q, p_y] = [x p_y - y p_x, p_y] = -[y, p_y] p_x = -i\hbar p_x$

$[Q, p_x^2 + p_y^2] = p_x [Q, p_x] + [Q, p_x] p_x + p_y [Q, p_y] + [Q, p_y] p_y$

$= p_x (i\hbar p_y) + (i\hbar p_y) p_x + p_y (-i\hbar p_x) + (-i\hbar p_x) p_y = 0$

$[Q, x^2 + y^2] = $ —— " —— $= 0$

Donc $[Q, H] = 0$ (conservation de L_z)

- on peut diagonaliser Q, H simultanément

3). $[m] = kg$

$[R] = m$

$[\hbar] = \frac{kg \cdot m^2}{s}$

$[\mathcal{E}] = kg \cdot \frac{m^2}{s^2} = \left[\frac{\hbar^2}{m R^2} \right]$

$\Leftrightarrow$ on peut introduire une échelle d'énergie $\mathcal{E} = \frac{\hbar^2}{mR^2}$

Dans le régime $\mathcal{E} \ll V_0$ (puits très profond)

on peut approcher $V(r)$ par une parabole (oscillateur harmonique)

$$V(r) \approx -V_0 \left(1 - \frac{x^2+y^2}{2R^2}\right) = V_0 + \frac{V_0 r^2}{2R^2}$$

Donc, en identifiant

$$m\omega^2 = \frac{V_0}{R^2} \Rightarrow \omega \approx \frac{1}{R}\sqrt{\frac{V_0}{m}}$$

on peut estimer la différence d'énergies :

$$\Delta E \sim \hbar\omega = \frac{\hbar}{R}\sqrt{\frac{V_0}{m}}$$

Ex. 3 1). les niveaux d'énergies

$$E_l = \hbar^2 \frac{l(l+1)}{2I}$$

multiplicités : $2l+1$ associées aux différentes valeurs propres de L_z

fonctions propres communes de L^2, L_z : harmoniques sphériques

2). $[L^2, L_z] = [L^2, S^2] = [L^2, S_z] = [L_z, S^2] = [L_z, S_z] = [S^2, S_z] =$

$\Leftrightarrow$ diagonalisation simultanée de L^2, L_z, S^2, S_z possible

3). $[J^2, L^2] = [L^2 + S^2 + 2L\cdot S, L^2] =$

$$= \underbrace{[L^2, L^2]}_{=0} + \underbrace{[S^2, L^2]}_{=0} + 2[L\cdot S, L^2] =$$

$$= 2\underbrace{[L_x, L^2]}_{=0} S_x + 2\underbrace{[L_y, L^2]}_{=0} S_y + 2\underbrace{[L_z, L^2]}_{=0} S_z = 0.$$

comme les opérateurs commute, la diagonalisation simultanée (et donc vecteurs propres communs est possible). Même argument pour J^2 et S^2.

4a). $[J^2, L_z] = [L^2 + S^2 + 2L\cdot S, L_z] = 2[L_x, L_z]S_x + 2[L_y, L_z]S_y$

$= -2i\hbar L_y S_x + 2i\hbar L_x S_y = 2i\hbar (L_x S_y - L_y S_x)$

Pour l'existence de $|0\rangle$, il faut $(L_x S_y - L_y S_x)|0\rangle = 0$

4b). $[J^2, S_z] =$ —— " —— $= 2i\hbar (S_x L_y - S_y L_x)$

—— " ——

4c). $[J^2, J_z] = 2i\hbar (L_x S_y - L_y S_x) + 2i\hbar (S_x L_y - S_y L_x) = 0$

$\Leftrightarrow$ diagonalisation et vecteurs propres communs possibles